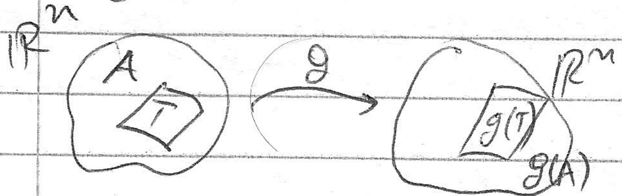
11/04/16. **K.A.M.**: $A\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό, $g:A\to\mathbb{R}^n$, 1-1 και C^1

και ή $\det Dg(y)>0,\ \forall y\in A$ ή $\det Dg(y)<0,\ \forall y\in A$.

$T\subset A$ J-μετρ. συμπαγές

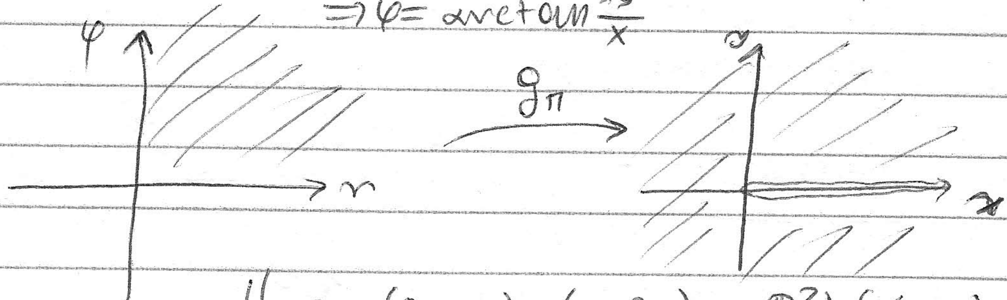
$f:g(T)\to\mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow \displaystyle\int_{g(T)} f(x)\,dx = \int_T f(g(y))\,|\det Dg(y)|\,dy$



Πολικές $g_\pi:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$, $g_\pi(r,\varphi)=\begin{pmatrix} r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\varphi=\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\dfrac{y}{x}\Rightarrow$

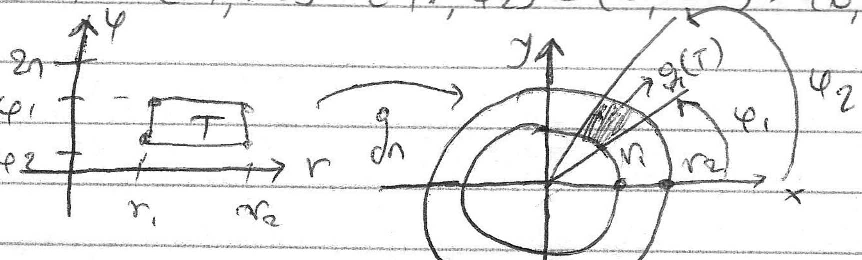
$\Rightarrow \varphi=\arctan\dfrac{y}{x}$

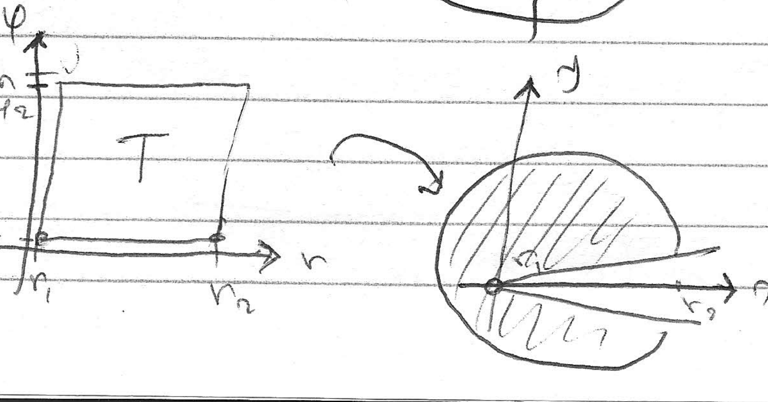


Η $g_\pi:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0):x\geq 0\}$

είναι 1-1 κ' επί $\Rightarrow \exists\, g_\pi^{-1}$

Όπως ορίσαμε την $g_\pi:(0,+\infty)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$ και σύμφωνα με ΚΑΜ μπορούμε να υπολογίσουμε, χωρίς πρόβλημα, όλα για $T=[r_1,r_2]\times[\varphi_1,\varphi_2]\subset(0,\infty)\times(0,2\pi)$





Παρατήρηση: Βάσει των ιδιοτήτων της $g_\pi : (0,\infty)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$ και των απαιτήσεων του ΚΑΜ, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ΚΑΜ για $T = [r_1, r_2]\times[\varphi_1,\varphi_2] \subset (0,\infty)\times(0,2\pi)$ και έχουμε:

$$\int_{g(T)} f(x,y)\,d(x,y) = \int_T f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d(r,\varphi) =$$

$$= \int_{r_1}^{r_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d\varphi\, dr.$$

Όμως επειδή υπάρχουν τα όρια των δύο ολ/ων για $r_1 \downarrow 0$, $\varphi_1 \downarrow 0$, $\varphi_2 \uparrow 2\pi$ αποδ. από ΘΜΤ για ολ/κό λογισμό ότι ο πάνω τύπος ισχύει και για $T = [r_1, r_2]\times[\varphi_1,\varphi_2] \subset$
$\subset [0,\infty)\times[0,2\pi]$

ΘΜΤ για ολ/κό λογισμό: $B \neq \emptyset$, J-μετρ., $f: B \to \mathbb{R}$ ολ/μη $\Rightarrow$

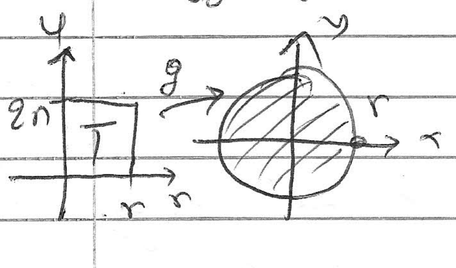
$$\Rightarrow \inf f \cdot v(B) \le \int_B f \le \sup f \cdot v(B)$$

π.χ. Υπολ. το περιεχόμενο του κυκλ. δίσκου ακτίνας $r>0$ κέντρου $(0,0)$

Λύση: $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le r^2\} = g([0,r]\times[0,2\pi])$
όπου $g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \Rightarrow$

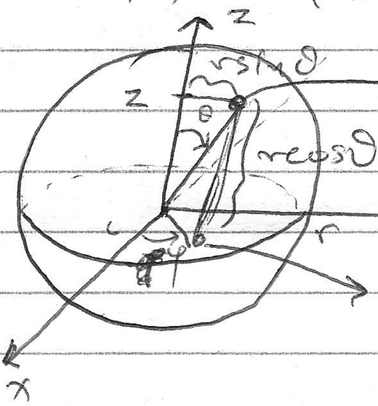
$$\xRightarrow{KAM} v(D) = \int_D 1\, d(x,y) \overset{KAM}{=} \int_{[0,r_0]\times[0,2\pi]} 1 \cdot r \cdot d(r,\varphi) =$$

$$\overset{Fubini}{=} \int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} r\, dr\, d\varphi = 2\pi \int_0^{r_0} r\, dr = 2\pi \frac{r_0^2}{2} = \pi r_0^2$$



Σφαιρικές Συν/νες: $g_\sigma:(0,\infty)\times(0,\pi)\times(0,2\pi)\to\mathbb{R}^3$

$$g_\sigma(r,\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\sin\theta\cos\varphi\\ r\sin\theta\sin\varphi\\ r\cos\theta\end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=g_\sigma(r,\theta,\varphi)$$

$$\begin{pmatrix}r\sin\theta\cos\varphi\\ r\sin\theta\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

Άρα $\det Dg_\sigma(r,\theta,\varphi)=r^2\sin\theta>0,\ \theta\in(0,\pi)$

Ισχύει ανάλογα με την παρατήρηση για πολικές συν/νες ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ΚΑΜ ειδικότερα για $T=[r_1,r_2]\times[\theta_1,\theta_2]\times[\varphi_1,\varphi_2]\subset[0,\infty)\times[0,\pi]\times[0,2\pi]$

Π.χ. Υπολ. τον όγκο της μπάλας στον $\mathbb{R}^3$ κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $r_0>0$.

Λύση: $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\le r^2\}=g_\sigma(T)$, όπου
$T=[0,r_0]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]\Rightarrow$

$$\Rightarrow v(M)=\int_M 1\,d(x,y,z)\underset{KAM}{=}\int_T 1\cdot r^2\sin\theta\,d(r,\theta,\varphi)=$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=}\int_0^{r_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr=$$

$$=2\pi\underbrace{\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\right)}_{=-\cos\theta\big|_{\theta=0}^{\pi}}\underbrace{\left(\int_0^{r_0}r^2\,dr\right)}_{\frac{r_0^3}{3}}=\boxed{4\pi\,\frac{r_0^3}{3}}$$

Ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός: $g_0:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\bar{x}=g_0(\bar{y})=A\bar{y}+\bar{b}$

όπου $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ με $\det A\neq 0$, $\bar{b}\in\mathbb{R}^n$

(για $A=I\Rightarrow$ μεταφορά ~~ως προς~~ κατά $\bar{b}$, για $\bar{b}=\bar{0}$ έχουμε γραμμική απεικόνιση)

→ $D\bar{g}(\bar{y}) = A \Rightarrow$ ο τύπος αλλαγής μεταβλ. ισχύει

$\forall\, T$ J-μετρ, συμπαγές, $T \subset \mathbb{R}^n$ και $\displaystyle\int_{AT+\bar{b}} f(\bar{x})\,d\bar{x} = |\det A| \int_T f(A\bar{y}+\bar{b})\,d\bar{y}$

<u>A 144</u> : Νδο $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$

<u>Λύση</u> : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx + \lim_{R'\to\infty}\int_{-R'}^{0} e^{-x^2}dx$

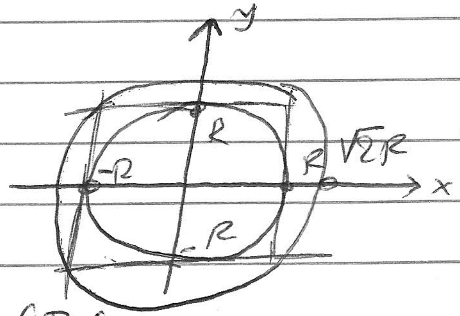
$$= \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx + \lim_{R'\to\infty}\int_0^{R'} e^{-y^2}dy = 2\lim\int_0^R e^{-x^2}dx \qquad \underline{\quad} \; y=-x$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $\displaystyle f(R) = \int_{B((0,0),R)} e^{-(x^2+y^2)}\,d(x,y)$

$\displaystyle g(R) = \int_{[-R,R]\times[-R,R]} e^{-(x^2+y^2)}$

παίρνουμε επεκτάσεις

$$\underbrace{f(R)}_{\xrightarrow[R\to\infty]{}\pi} \le \underbrace{g(R)}_{\left(4\int_0^R e^{-x^2}dx\right)} \le \underbrace{f(\sqrt{2}R)}_{\xrightarrow[R\to\infty]{}\pi} \; (*)$$



Όμως $\displaystyle f(R) \overset{\text{πολικές}}{=} \int_0^R\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r \,d\varphi\, dr = 2\pi\int_0^R e^{-r^2} r\,dr = \pi(1-e^{-R^2})$

και $\displaystyle g(R) = \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy = \left(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx\right)^2 = 4\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$

$(*) \Rightarrow \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$